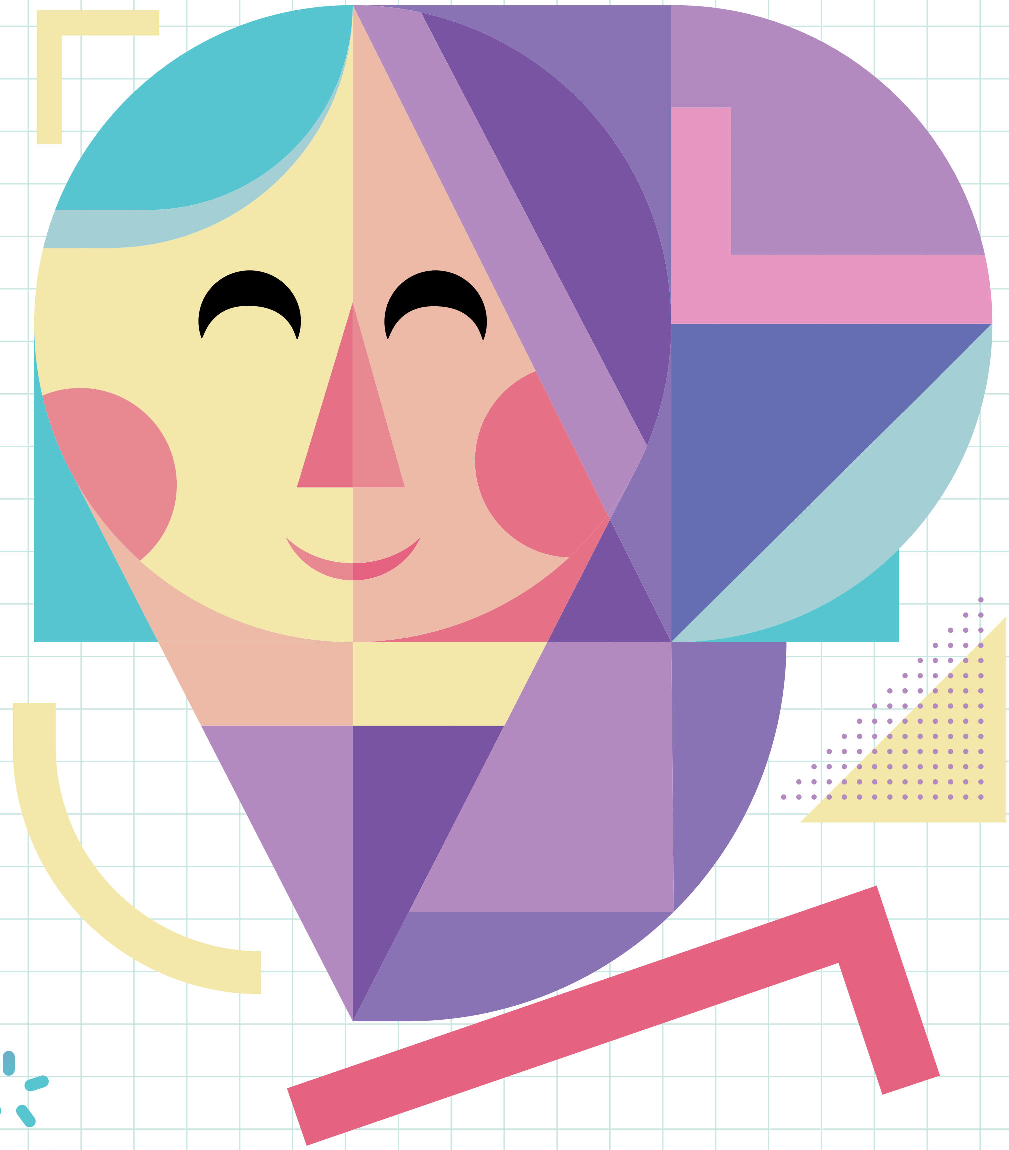


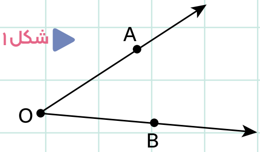
محمود نصیری

تفکر هندسی و مفهوم‌های هندسی

مقدمه

در بخش‌های قبلی با مفهوم‌های خط، نیم‌خط، پاره‌خط، اندازهٔ پاره‌خط و هم‌نهشتی دو پاره‌خط آشنا شدیم. در این قسمت و قسمت بعد با مفهومی دیگر از هندسه که دومین پایهٔ اساسی بیشتر شکل‌های هندسی، به‌ویژه چندضلعی‌ها را تشکیل می‌دهند، آشنا می‌شویم. این مفهوم مهم «زاویه» نام دارد.

انگشتان دست خود را باز کنید. هر دو انگشت متوالی شما به‌طور شهودی، نمایش یک زاویه است. بنابراین، زاویه به وسیلهٔ دو نیم‌خط با ابتدای مشترک شکل می‌گیرد (شکل ۱).



شکل ۱

تعریف

دو نیم‌خط با ابتدای مشترک را زاویه می‌نامند. هریک از دو نیم‌خط را ضلع زاویه و نقطهٔ ابتدای مشترک آن‌ها را رأس زاویه می‌نامند.

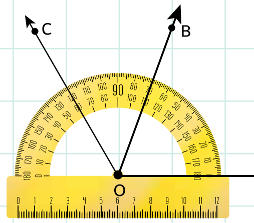
اگر $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ دو نیم‌خط باشند، زاویهٔ شامل آن دو را به $\angle AOB$ یا $\angle BOA$ نشان می‌دهیم. رأس زاویه همواره در وسط دو حرف دیگر است. اگر ابهامی وجود نداشته باشد، زاویه را با حرف رأس آن نیز نشان می‌دهند؛ مانند $\angle O$. دو نقطهٔ A و B روی دو ضلع زاویه هر دو نقطه‌ای روی دو ضلع به جز رأس O می‌توانند باشند. زاویه را «گوشه» نیز می‌نامند. شاید هم این نام بهتر مفهوم را آشکار می‌سازد. اگر به اطراف خود بنگریم، اشیای زیادی را مشاهده خواهیم کرد که دارای گوشه هستند. پاره‌خط‌ها

و زاویه‌ها ساختمان اصلی شکل‌های هندسی هستند که آن‌ها را «چندضلعی» می‌نامند. در بخش‌های بعدی آن‌ها را بررسی می‌کنیم. همان‌گونه که به یک پاره‌خط عدد مثبتی را نظیر کردیم که آن را اندازهٔ پاره‌خط نامیدیم، به هر زاویه نیز عددی بین ۰ و ۱۸۰ نظیر می‌کنیم و آن را «اندازهٔ زاویه» می‌نامیم.

اندازهٔ زاویه

مانند اندازهٔ پاره‌خط که با خط‌کش تعیین می‌شود، اندازهٔ زاویه را با نقاله اندازه‌گیری می‌کنیم. مرکز نقاله را روی O رأس زاویه قرار می‌دهیم، به‌طوری‌که صفر نقاله روی یک ضلع زاویه، مثلاً روی $\overrightarrow{OA}$ قرار گیرد، ضلع دیگر زاویه روی هر عددی از نقاله قرار گیرد، آن را اندازهٔ آن زاویه می‌نامند. در شکل ۲ ضلع $\overline{OB}$ روی عدد ۷۰° واقع شده است. پس می‌گوییم اندازهٔ $\angle AOB$ برابر ۷۰° است و می‌نویسیم: $\angle AOB = ۷۰^\circ$. اندازهٔ هر زاویه مانند $\angle AOB$ را با $m\angle AOB$ نشان می‌دهیم (شکل ۲).

شکل ۲



توجه داریم که خود زاویه در هندسه مجموعه‌ای از نقطه‌هاست؛ مجموعه نقطه‌های روی دو نیم‌خط با ابتدای مشترک. اما اندازهٔ این زاویهٔ هندسی یک عدد است. عددی بین صفر و ۱۸۰ که به آن نسبت می‌دهیم یا نظیر می‌کنیم. با توجه به شکل ۲، $m\angle AOC = ۱۲۰^\circ$ و به وسیلهٔ کم کردن گوییم:

$$m\angle BOC = m\angle AOC - m\angle AOB$$

پس در این شکل $m\angle BOC = ۵۰^\circ$. چرا؟

وقتی ضلع‌های دو زاویه بر هم منطبق شوند، در بعضی کتاب‌ها اندازهٔ زاویه را صفر می‌نامند. اگر هم ضلع‌های دو زاویه دو نیم‌خط متقابل باشند، اندازهٔ زاویه را ۱۸۰° تعریف می‌کنند و آن را «زاویهٔ نیم‌صفحه» می‌نامند.

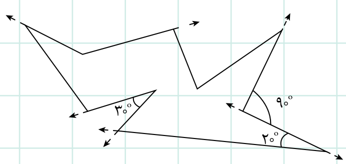
اما باید توجه داشته باشیم که در دنیای واقعی در هندسه چنین زاویه‌هایی وجود ندارند. آنچه را زاویه به اندازهٔ صفر می‌نامیم، در واقع یک نیم‌خط است و آنچه را که زاویهٔ نیم‌صفحه می‌نامیم، در واقع یک خط است و هیچ شکل هندسی چنین زاویه‌هایی ندارد.

آنچه که در کتاب‌های درسی باید به وضوح توضیح داده شود. همین مفهوم زاویه در هندسه و سپس در مثلثات یا جبر است. در کتاب‌ها معمولاً این دو زاویه با هم مخلوط می‌شوند:

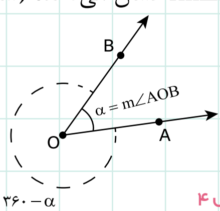
زاویه به اندازهٔ صفر و زاویه به اندازه ۱۸۰°، حتی زاویهٔ به اندازهٔ ۲۵۰° یا ۱۵۷۶° هم می‌توانیم داشته باشیم، اما این زاویه‌ها در هندسه نیستند، بلکه در جبر و مثلثات هستند. آن‌ها را «زاویهٔ مثلثاتی» یا «زاویهٔ جهت‌دار» می‌نامند.

ما می‌توانیم تمام زاویه‌هایی را که در (شکل ۳) مشاهده می‌کنید، با نقاله‌ای که از ۰ تا ۱۸۰ درجه‌بندی شده است، اندازه‌گیری کنیم.

شکل ۳



در بعضی از کتاب‌های مرجع، وقتی اندازهٔ یک زاویه α باشد و داشته باشیم: $۰ < \alpha < ۱۸۰$، عدد $۳۶۰ - \alpha$ را اندازهٔ بازتابیده[1] (خم شده به عقب) زاویهٔ AOB می‌نامند و آن را به این ترتیب: $rm\angle AOB$ نشان می‌دهند (شکل ۴).



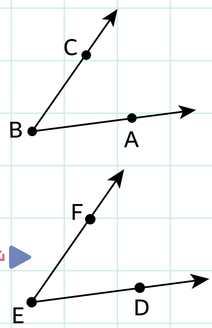
شکل ۴

در واقع زاویهٔ ما همان $\angle AOB$ است که شامل دو نیم‌خط $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ می‌شود. در شکل ۳ مشابه آن را مشاهده می‌کنید.

این نوع زاویه‌ها را «مقعر» نیز می‌نامند. اما در منابع جدید از این نام‌گذاری پرهیز می‌شود. زیرا نه‌تنها مشکلی را حل نمی‌کند، بلکه مشکل‌آفرین نیز می‌شود. در مبانی هندسه چنین مفهومی وجود ندارد، زیرا نیازی به آن نیست. با بعضی تعریف‌ها هم تناقض پیدا می‌کند. مثلاً بعداً خواهیم دید مفهوم نقطهٔ درون زاویه و کلاً مفهوم درون زاویه بی‌معنی می‌شود.

وقتی زاویه را در مثلثات و جبر به کار می‌بریم، زاویه مفهوم دیگری دارد که نمایش آن همان نمایش زاویهٔ هندسی است، اما اندازهٔ آن به کمک اندازهٔ زاویهٔ هندسی و دوران نیم‌خط‌ها تعریف می‌شود. این نوع زاویه را «زاویهٔ مثلثاتی» یا «زاویهٔ جهت‌دار» نیز می‌نامند. جهت چرخاندن یا دوران مهم است. حتی زاویه‌های با اندازهٔ منفی نیز خواهیم داشت. در این بخش وارد بحث زاویه‌های جهت‌دار نخواهیم شد، زیرا نیازی به آن نداریم.

به کمک اندازهٔ زاویه می‌توانیم انطباق یا هم‌نهشتی دو زاویه را تعریف کنیم. دو زاویهٔ ABC و DEF در شکل ۵ دارای اندازه‌های برابر هستند. به‌طور شهودی می‌توانیم کپی از یکی از روی دیگری قرار دهیم. در این صورت دو ضلع هر یک بر دو ضلع دیگری منطبق می‌شوند. این دو زاویه را هم‌نهشت می‌نامند.



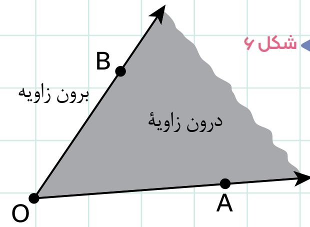
شکل ۵

دو زاویه را هم‌نهشت گوییم. هرگاه دارای اندازه‌های برابر باشند. اگر $m\angle ABC = m\angle DEF$، آن‌گاه: $\angle ABC \cong \angle DEF$ ($\cong$ نماد هم‌نهشتی). به همین ترتیب اگر: $\angle ABC \cong \angle DEF$، آن‌گاه: $m\angle ABC = m\angle DEF$.

درون زاویه

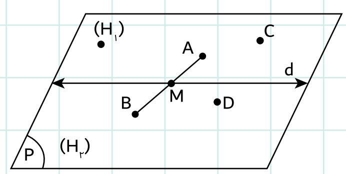
بـرای بررســی ویژگی‌هـای دیگری از زاویه به مفهومــی به نام «درون‌زاویه» و «برون‌زاویه» نیاز داریم.

چون اندازۀ هر زاویه را در هندسه عددی بیــن ۰ و ۱۸۰ تعریــف کردیم، در این صورت می‌توانیــم درون و برون زاویه را تعریف کنیم.



شکل ۶

در شکل ۶ قسمت سایه‌زده درون زاویۀ $\angle AOB$ نامیـده می‌شـود. مجموعه نقطه‌هایـی کـه درون و روی زاویــه نباشــند، برون زاویه نامیده می‌شــوند. برای تعریف دقیق‌تر درون زاویه طرفین خط را در یک صفحه بررسی می‌کنیم. خط d را در صفحۀ P در نظر می‌گیریم (شــکل ۷). ایــن خط صفحــۀ P را به سه مجموعه تقســیم می‌کند: مجموعه نقطـه‌های روی خـود خـط d و دو مجموعــۀ H_1 و H_2 که آن‌ها را طرفین خط d یا نیم‌صفحه‌هــای محدود به d می‌نامیم.



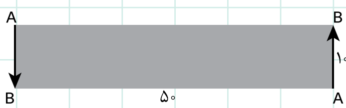
شکل ۷

تذکر: این نمایش صفحه به شــکل یک متوازی‌الاضلاع یک قرارداد اســت. در اساس صفحه در هندســۀ اقلیدسی از همه طرف ادامه دارد.

در شــکل دو نقطــۀ A و C متعلق به نیم‌صفحۀ H_1 و دو نقطه B و D متعلق به نیم‌صفحۀ H_2 هســتند. شاید شما به ســادگی قبول کنید که اگــر دو نقطۀ A و B را کــه متعلق بــه دو نیم‌صفحۀ مجزا هستند به هم وصل کنیم، در این صــورت پاره‌خط AB خــط d، مرز دو نیم‌صفحــه را در نقطۀ مانند M، بین A و B می‌بــرد؛ یعنی قطع می‌کند. این را اصل «جداپذیری صفحه» نیز می‌نامند.

ممکن است تعجب کنید که مگر غیر از این هم امکان دارد اتفاق بیفتد؟! پاسخ ما مثبت اســت. در بخش‌هــای قبلی دربارۀ خــط و صفحــه توضیح‌هایی را دادیم. حتی مشاهده کردید که چگونه در هندســه روی کره مفهوم بین بودن برقرار نیســت، در اینجا نیز مثال‌هایی داریــم کــه ممکن اســت صفحــه یا صفحه‌هایی داشته باشیم که این ویژگی را نداشته باشند.

یک نــوار کاغذی مستطیل‌شــکل را به طول حداقل ۵ و عرض ۱۰ ســانتی‌متر (شــکل ۸) در نظر بگیرید. (این عددها مهم نیستند فقط برای بهتر نشان دادن انتخاب شده‌اند).

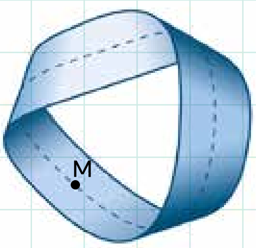


شکل ۸

اکنون نوار را به اندازۀ نیم‌دور بچرخانید و دو ســر AB را به همان بچســبانید. واضح اســت که با این چرخاندن نیم‌دور A روی A و B روی B قــرار می‌گیــرد. حال با یک نوارچســب این دو سر را به هم بچسبانید. در این صورت نوار شما به شــکل یک نوار حلقه‌ای مانند شکل (۹) درمی‌آید. این نوار به نوار موبیوس به نام یک ریاضی‌دان معروف است. اکنون نوک مداد را در نقطه‌ای مانند M حدوداً وسط نــوار بگذارید و مــداد را حرکت دهید، به‌طوری‌که مــرز نوار را هیــچ‌گاه قطع نکنید.

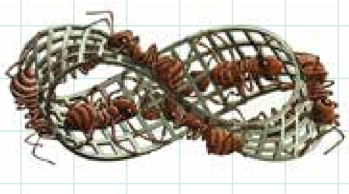
شکل ۹

بعد از طــی کردن تمام نوار مشــاهده خواهید کــرد که دوباره بــه نقطۀ M برمی‌گردیــد؛ یعنــی به نقطۀ شــروع می‌رسید. در واقع شما توانسته‌اید از یک طرف نوار به طرف دیگر نوار بروید بدون آنکه مرز نوار را قطع کرده باشــید. این شکل به ما نشان می‌دهد که این صفحه نوار یــک طــرف دارد و برخلاف آنچه نشــان دادیم، این خط صفحه را به دو بخش مجزا تقســیم نکرده است (شکل ۱۰). به همین دلیــل اگر این نوار را از روی خط نقطه‌چین‌ها ببرید، مشــاهده خواهیــد کرد که نوار بــاز هم یکپارچه است به این معنی که دو تکه نمی‌شود.



شکل۱۰

در شکل ۱۱ نشان داده شده است که اگر یک مورچه روی این «صفحۀ موبیوس» حرکت کند، همواره از رو و پشت صفحه می‌گذرد و به نقطۀ شروع باز می‌گردد.



شکل۱۱

بــه همیــن دلیــل در هندســه‌ای که ساخته‌ایم لازم است بپذیریم که خط در یک صفحــه دو طرف دارد و اگر از یک طرف به طرف دیگــر برویم، این خط، مــرز نیم‌صفحه‌ها را حتماً قطع می‌کند. در این هندسه می‌توانیم، درون زاویه را به‌طور دقیق تعریف کنیم.

که در شــمارۀ بعد ایــن تعریف را بررسی می‌کنیم.